

به نام خدا
دانشگاه صنعتی شریف
دانشکده علوم ریاضی

آزمون پایان ترم: محاسبات عددی

روز آزمون: ۱۳۹۵/۱۱/۲

جمع نمره‌ها: ۵۰

زمان: ۳ ساعت

{ ۵ نمره } مساله ۱:

$$f'(x_i) - \frac{f(x_i + \frac{h}{2}) - f(x_i - \frac{h}{2})}{h} = O(h^2).$$

{ ۳ الف } ثابت کنید:

$$f'(x_i + \frac{h}{2}) - \frac{f_{i+1} - f_i}{h} = O(h^2).$$

{ ۲ ب } ثابت کنید:

که در آن، $f_i = f(x_i)$ ، $f_{i+1} = f(x_{i+1})$ و $h = x_{i+1} - x_i$.

{ ۳ نمره } مساله ۲:

فرض کنید انتگرال $\int_a^{a+h} f(x) dx$ با $\frac{h^2}{2} f'(a) + hf(a+h)$ تقریب زده شود. این فرمول برای چندجمله‌ای با حداکثر چه درجه‌ای دقیق است؟

{ ۶ نمره } مساله ۳:

{ ۳ الف } در فرمول انتگرال گیری $\int_0^{2\pi} f(x) dx \approx A_1 f(0) + A_2 f(\pi)$ ، A_1 و A_2 را طوری بیابید که روش برای توابعی به صورت $f(x) = a + b \cos(x)$ به ازای همه مقادیر حقیقی a و b دقیق باشد.

{ ۳ ب } ثابت کنید فرمول انتگرال گیری تقریبی

$$\int_0^{2\pi} f(x) dx \approx 2(f(0) + f(\pi)),$$

برای توابعی به صورت $f(x) = \sum_{k=1}^n (a_k \cos(2k+1)x + b_k \sin kx)$ برای هر $a_k, b_k \in \mathbb{R}$ دقیق است.

{ ۴ نمره } مساله ۴:

ماتریس $A = \begin{bmatrix} w & x \\ y & z \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. ماتریس دوران متعامد نرمال گیونز $Q_{2 \times 2}$ را طوری تعیین کنید، که $Q^T A$ متقارن باشد.

{ ۶ نمره } مساله ۵:

مساله‌ی زیر را حل کنید:

$$\min_{x \in \mathbb{R}^n} \left\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} x - \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \right\|_2.$$

{ ۷ نمره } مساله ۶:

رابطه تکراری زیر را در نظر بگیرید:

$$x_{n+1} = \frac{x_n^3 + 3\alpha x_n}{3x_n^2 + \alpha}, \quad \alpha > 0.$$

{ ۳ الف - تعیین کنید این دنباله‌ی تکراری در صورت همگرایی به چه مقداری همگراست؟

{ ۴ ب - مقدار دقیق مرتبه‌ی همگرایی این دنباله را به هر یک از مقادیر تعیین کنید.

{ ۷ نمره } مساله ۷:

معادله دیفرانسیل $y'(x, y(x)) = f(x, y)$, $y(x_0) = y_0$ را در نظر بگیرید.

{ ۴ الف - فرمول پیشگو تصحیح کننده‌ی (آدامز-بشفورث، $y_{n+1}^{(p)}$ ، و آدامز-مولتون، $y_{n+1}^{(c)}$) مرتبه ۱ را بدست آورید.

{ ۲ ب - یک تخمین برای $|y_{n+1}^{(p)} - y_{n+1}^{(c)}|$ بدست آورید.

{ ۱ پ - یک تخمین برای خطای تصحیح کننده، یعنی $|y_{n+1}^{(c)} - y(x_{n+1})|$ بدست آورید.

{ ۶ نمره } مساله ۸:

ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 8 & -2 \\ 2 & 0 & 15 \\ 2 & 3 & 11 \end{bmatrix},$$

را در نظر بگیرید.

{ ۴ الف - تجزیه LU را برای ماتریس A بدست آورید.

{ ۲ ب - به کمک تجزیه LU ، دستگاه $Ax = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4.5 \end{bmatrix}$ را حل کنید.

{ ۲ نمره } مساله ۹:

تابع $f(x) = x^n$ را در نظر بگیرید و فرض کنید $p(x)$ چندجمله‌ای درونیاب f در نقاط (x_i, x_i^n) , $i = 1, \dots, n$ باشد. با استفاده

از رابطه‌ی خطای برشی تابع درونیاب ثابت کنید که $f[x_1, \dots, x_n] = x_1 + \dots + x_n$.

{ ۴ نمره } مساله ۱۰:

همه معادلات مربوط به پیدا کردن ضرایب اسپلاین طبیعی $S(x)$ ($S''(0) = S''(2) = 0$) متناظر به نقاط $\begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

همراه با توضیحات مربوط به ارایه آنها را بنویسید. نیازی به حل دستگاه نیست.